数理解析研究所講究録
第 713 巻 1990 年 156-163

Rings with Approximation Property

(C. Rotthaus の論文の紹介)

京大理　西村純一 (Jun-ichi NISHIMURA)

0. 序。

最近、C. Rotthaus により、次の定理

定理 A 。　Approximation Property を持つ局所環は Excellent Hensel である。

が得られたので紹介します。既に、Artin, Popescu, Rotthaus 等により、

定理 B 。　Excellent Hensel 局所環は Approximation Property を持つ。

ことが証明されていますので、今度の C. Rotthaus の結果より、結局、

定理 C 。　局所環 A が Approximation Property を持つための必要十分条件は、A が Excellent Hensel であること。

が示されたことになります。

Rotthaus の証明のポイントは、局所環 A の完備化 $\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathfrak{p}}$ での局所環 $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ が正則でないことを適当な方程式系で記述し、次の Artin-Rotthaus (cf. Popescu) に依る、定理 D を利用することです。(詳細は次節以下を参照して下さい。) なお、上記の定理 B の証明にも定理 D は、本質的に重要な役割を果していました。

定理 D 。　$V \to W$ が、Excellent Cohen 環 (または、体) の準同型で、$V/pV \to W/pW$ が分離的。$R_0 = V[X_1, \ldots, X_m]$ 、$R = W[[X_1, \ldots, X_m]]$ であれば、R は順滑 (= smooth) R_0-代数の順極限 (= direct limit) で表される。即ち、任意の有限型 R_0-代数 (= R_0-algebra of finite type) B に対し、次の図式を可換にする順滑 R_0-代数 D が存在する。

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

1. 準備。(定義、記号、事実、等)

定義 1.1　局所環 A が Approximation Property (以下、(AP) と略) を持つとは、A 上の多項式環 $A[Y] = A[Y_1, \ldots, Y_n]$ (n は任意) の方程式系 $f_1(Y), \ldots, f_N(Y) \in A[Y]$ が、A の完備化 $\hat{A}$ に解 $(\hat{y}) = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n) \in \hat{A}^n$ を持つ。即ち、$f_1(\hat{y}) = \ldots = f_N(\hat{y}) = 0$ なら、A に於ても解 $(y) = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ を持つ。即ち、$f_1(y) = \ldots = f_N(y) = 0$ 。

定義 1.2　局所環 A が Excellent とは、A が強鎖状 (= universally catenary)、且つ、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ が正則射。

注意 1.3　自然な準同型 $A \to \hat{A}$ が正則射であることと、次は同値。

任意の有限 A-整域 B と $\hat{P} \in \mathrm{Spec}\hat{B}$ に於て、$\hat{P} \cap B = (0)$ であれば、$\hat{B}_{\hat{P}}$ は正則局所環。

注意 1.4　A が (AP) を持てば、A は Hensel 環。更に、A が被約 (= reduced)、整域 (= domain)、正規 (= normal) なら、$\hat{A}$ もそれぞれ、被約、整域、正規。

次の事実は自明ではありませんが、よく知られています。

命題 1.5　A が (AP) を持てば、任意の有限 A-代数 B も (AP) を持つ。

命題 1.5 と注意 1.4 (cf.　注意 1.3) より、次の系を得ます。

系 1.6　A が (AP) を持てば、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ は被約射。

系 1.7　A が (AP) を持てば、A は強鎖状。

系 1.8　A が (AP) を持てば、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ は正規射。

2. 方程式系。

以下、二つの n 次元 正則局所環 (R_0, m_0) 、(R, m) で、$R_0 \subseteq R$、且つ、$\mathrm{m}_0 R = \mathrm{m}$ であるもの、及び、$(R/\mathrm{q})_\mathrm{p}$ が正則でない R の素イデアル p 、$\mathrm{q}\,(\in \mathrm{Spec}R)$ を固定して話を進めます。

まず、次の補題に注意しておきます。

補題 2.0　a が R の高さ h のイデアルであれば、m_0 の元 $\ell_1, \ldots, \ell_{n-h}$ で、$(\mathrm{a}, \varphi(\ell_1), \ldots, \varphi(\ell_{n-h}))$ が m-準素イデアルであるものが見つけられる。

写像 $\delta : R\setminus\{0\}\to \mathbf{N}\ (a\mapsto\delta(a))$ を $a\in\mathbf{m}^{\delta(a)}\setminus\mathbf{m}^{\delta(a)+1}$ により、$R\setminus\{0\}\to \mathrm{gr}_{\mathbf{m}}R$ $(a\mapsto a^*)$ を $a^*=a+\mathbf{m}^{\delta(a)+1}\in\mathbf{m}^{\delta(a)}/\mathbf{m}^{\delta(a)+1}$ で定め — $\delta(a)$ を a の次数 (= degree)、a^* を a の leading form と呼びます —。そして、R のイデアル $\mathbf{a}$ に対し、$\mathbf{a}^*$ で $\mathbf{a}$ の元の leading forms で生成された $\mathrm{gr}_{\mathbf{m}}R$ のイデアルを表します。
$\mathbf{m}_0=(X_1,\ldots,X_n)$ (即ち、$X_1,\ldots,X_n$ が R_0 の正則パラメーター系) である時、

$$\Gamma_k=\{X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}\mid e_1+\cdots+e_n=k\}=\{m(k,\gamma)\mid\gamma=1,\ldots,\gamma_k\}$$

と書きます。

2.1 q を記述する方程式系。

最初に、$\mathbf{q}$ の生成系 $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を、$(q_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}=\mathbf{q}^*$ であるように選びます。次に、$t=\max\{\delta(q_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ であれば、$\mathbf{q}^*$ の k 次成分 $\mathbf{q}_k^*\ (k\le t)$ を

$$\mathbf{q}_k^*=<q_\lambda^*\ (\delta(q_\lambda)=k),\ q_\lambda^*\cdot m(\ell,\gamma)\ (\delta(q_\lambda)+\ell=k)>$$

のように、$R/\mathbf{m}$-ベクトル空間とみなし、

$$\Pi_k=\{q_\mu\mid\delta(q_\mu)=k\}\bigcup\{q_\nu\cdot m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\mid\delta(q_\nu)+\ell_\nu=k\}$$

を、$\Pi_k^*=\{q_\mu^*\}\cup\{q_\nu^*\cdot m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\}$ がベクトル空間 $\mathbf{q}_k^*$ の基底であるように取り、$\Theta_k\,(\subseteq\Gamma_k)$ を、$\Pi_k^*\cup\Theta_k$ が $\mathbf{m}^k/\mathbf{m}^{k+1}$ の基底であるように取ります。

約束。 以下の関係式・方程式系に於て、下線記号 (例えば、$\underline{q}_\lambda$) は、R_0 上 R の元 q_λ の関係式系を表し、同時に、同じ式を R_0 上の方程式系と考える場合には、不定元 Q_λ を表していると解釈します。

$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\Pi_k,\Theta_k$ 等の選び方から、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 1.}}$
$$\underline{q}_\lambda=\textstyle\sum_{\gamma=1}^{\gamma_k}\underline{a}_{\lambda\gamma}m(k,\gamma),\quad k=\delta(q_\lambda)\ (\lambda\in\Lambda)$$

$\boxed{\text{Equations 2.}}$
$$\begin{aligned}m(k,\kappa)&=\textstyle\sum_{q_\mu\in\Pi_k}\underline{b}_{(k,\kappa)\mu}\underline{q}_\mu+\sum_{q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\in\Pi_k}\underline{c}_{(k,\kappa)\nu}\underline{q}_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\\&\quad+\textstyle\sum_{m(k,\gamma)\in\Theta_k}\underline{d}_{(k,\kappa)\gamma}m(k,\gamma)\\&\quad+\textstyle\sum_{m(k+1,\varepsilon)\in\Gamma_{k+1}}\underline{e}_{(k,\kappa)\varepsilon}m(k+1,\varepsilon)\\&\in\ \Gamma_k\setminus\Theta_k\quad(k\le t)\end{aligned}$$

この時、$B_1=R_0[Q_\lambda,A_{\lambda\gamma},B_{(k,\kappa)\mu},C_{(k,\kappa)\nu},D_{(k,\kappa)\gamma},E_{(k,\kappa)\varepsilon}]/J_1$ と定義します。但し、

$$\begin{aligned}J_1=(&Q_\lambda-\textstyle\sum_{\gamma=1}^{\gamma_k}A_{\lambda\gamma}m(k,\gamma),\\&m(k,\kappa)-\{\textstyle\sum_{q_\mu\in\Pi_k}B_{(k,\kappa)\mu}Q_\mu+\sum_{q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\in\Pi_k}C_{(k,\kappa)\nu}Q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\\&\qquad+\textstyle\sum_{m(k,\gamma)\in\Theta_k}D_{(k,\kappa)\gamma}m(k,\gamma)+\sum_{m(k+1,\varepsilon)\in\Gamma_{k+1}}E_{(k,\kappa)\varepsilon}m(k+1,\varepsilon)\})\end{aligned}$$

命題 2.1.1　R_0-準同型 $\varphi_1 : B_1 \to R$ が $\varphi_1(Q_\lambda) \in \mathbf{q}\ (\lambda \in \Lambda)$ であれば、$(\varphi_1(Q_\lambda)) = \mathbf{q}$。

証明。　$\tilde{\mathbf{q}} = (\varphi_1(Q_\lambda))$ と表せば、仮定より $\tilde{\mathbf{q}} \subseteq \mathbf{q}$。更に、関係式・方程式系 1 、2 より $\tilde{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q}^*$。故に、$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$。

2.2　$\mathbf{p}$ の高さ（$\mathrm{ht}\,\mathbf{p} = h$）を記述する方程式系。

次に、$q_\sigma \in R(\sigma \in \Sigma(\supset \Lambda))$ を増し、$\mathbf{p} = (q_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$、且つ、$\{q_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ が次の条件を満たす $v_1, \ldots, v_h$ を含んでいる、と仮定します。

2.2.1　$s \in R \setminus \mathbf{p}$ が存在し、$s\,\mathbf{p} \subset (v_1, \ldots, v_h)$、
2.2.2　$\mathrm{ht}\,(v_1, \ldots, v_h) = h$。

即ち、$\ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_1(\in \mathbf{N})$ が存在し、

2.2.3　$\mathbf{m}^{k_1} \subset (v_1, \ldots, v_h, \ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)})R$。

以上より、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 3.}}$　$$\underline{v}_i = \underline{q}_{\sigma_i} \qquad (i = 1, \ldots, h;\ \sigma_i \in \Sigma)$$

$\boxed{\text{Equations 4.}}$　$$\underline{s}\,\underline{q}_\sigma = \textstyle\sum_{i=1}^h \underline{f}_{\sigma i}\,\underline{v}_i \qquad (\sigma \in \Sigma)$$

$\boxed{\text{Equations 5.}}$　$$m(k_1, \gamma) = \textstyle\sum_{i=1}^h \underline{g}_{\gamma i}\,\underline{v}_i + \sum_{j=1}^{n-h} \underline{h}_{\gamma j}\,\ell_j^{(1)} \qquad (\gamma = 1, \ldots, \gamma_{k_1})$$

ここで、$B_2 = B_1[Q_\sigma, V_i, S, F_{\sigma i}, G_{\gamma i}, H_{\gamma j}]/J_2$ と定義します。但し、

$$J_2 = (V_i - Q_{\sigma_i},\, SQ_\sigma - \sum_{i=1}^h F_{\sigma i}V_i,\, m(k_1, \gamma) - \{\sum_{i=1}^h G_{\gamma i}V_i + \sum_{j=1}^{n-h} H_{\gamma j}\ell_j^{(1)}\})。$$

命題 2.2.4　R_0-準同型 $\varphi_2 : B_2 \to R$ が $\varphi_2(S) \notin (\varphi_2(V_i))$ であれば、$(\varphi_2(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_2}$ で、高さ h のものが存在する。

証明。　関係式・方程式系 5 より $\mathbf{m}^{k_1} \subset (\varphi_2(V_1), \ldots, \varphi_2(V_h), \ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)})$ だから、$(\varphi_2(V_1), \ldots, \varphi_2(V_h)) = \mathbf{q}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{q}_r$ は高さ h の清純（= unmixed）イデアル。仮定より、$\varphi_2(S) \notin \mathbf{q}_j$ である $j\ (1 \le j \le r)$ が見つかり、一方 $\mathbf{a} = (\varphi_2(Q_\sigma))$ と表せば、関係式・方程式系 4 より $\varphi_2(S)\mathbf{a} \subseteq \mathbf{q}_j$。依って、十分大きな自然数 ν が見つかり $\mathbf{a}^\nu \subseteq \mathbf{q}_j$。故に、$\mathbf{p}_{\varphi_2} = \sqrt{\mathbf{q}_j}$ が求める高さ h の極小素イデアル。

2.3　$(R/\mathbf{q})_\mathbf{p}$ が正則でないことを記述する方程式系。

以下、$|\Lambda| = m$。即ち、$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{q_1, \ldots, q_m\}$。また、$m$ 次対称群を Ω_m で表

します。

さて、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}}$ が正則でないことを言い替えますと、任意の置換 $\omega \in \Omega_m$ に対し、非負整数 $k(\omega)\,(< \mathrm{ht}\,\mathbf{q})$ と元 $t(\omega) \in R \setminus \mathbf{p}$ が見つかり、

2.3.1　$t(\omega)\, q_{\omega(k(\omega)+1)} \in \mathbf{p}^2 + (\, q_{\omega(1)}, \ldots, q_{\omega(k(\omega))}\,)$。

更に、$t = \prod_{\omega\in\Omega_m} t(\omega) \notin \mathbf{p}$ を言い替えますと、$\ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(2)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_2\,(\in \mathbf{N})$ が存在し

2.3.2　$\mathbf{m}^{k_2} \subset (\mathbf{p}, t, \ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(2)})\, R$。

以上より、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 6.}}$　$$\underline{t}\, \underline{q}_{\omega(k(\omega)+1)} = \sum_{\sigma,\tau\in\Sigma} \underline{k}_{\omega\sigma\tau}\, \underline{q}_\sigma\, \underline{q}_\tau + \sum_{i=1}^{k(\omega)} \underline{m}_{\omega i}\, \underline{q}_{\omega(i)}$$

$\boxed{\text{Equations 7.}}$　$$m(k_2,\gamma) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \underline{n}_{\gamma\sigma}\, \underline{q}_\sigma + \underline{r}_\gamma\, \underline{t} + \sum_{j=1}^{n-h-1} \underline{u}_{\gamma j}\, \ell_j^{(2)}$$

次に、$B_3 = B_2[T, K_{\omega\sigma\tau}, M_{\omega i}, N_{\gamma\sigma}, R_\gamma, U_{\gamma j}]/J_3$ と定義します。但し、

$$\begin{aligned} J_3 = (\; & TQ_{\omega(k(\omega)+1)} - \{\textstyle\sum_{\sigma,\tau\in\Sigma} K_{\omega\sigma\tau} Q_\sigma Q_\tau + \sum_{i=1}^{k(\omega)} M_{\omega i} Q_{\omega(i)}\}, \\ & m(k_2,\gamma) - \{\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma} N_{\gamma\sigma} Q_\Sigma + R_\gamma T + \sum_{j=1}^{n-h-1} U_{\gamma j} \ell_j^{(2)}\}\,)\text{。} \end{aligned}$$

命題 2.3.3　R_0-準同型 $\varphi_3 : B_3 \to R$ が $\varphi_3(Q_\lambda) \in \mathbf{q}\,(\lambda \in \Lambda)$、$\varphi_3(S) \notin (\varphi_3(V_i))$ を満たせば、$(\varphi_3(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_3}$ で、$\mathbf{q} \subset \mathbf{p}_{\varphi_3}$、$\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_{\varphi_3} = h$、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}_{\varphi_3}}$ が正則でない、ものが存在する。

証明略。

2.4　Sing$(R/\mathbf{q})$ に於ける $\mathbf{p}$ と他の極小素イデアルとの関係を記述する方程式系。

以後、次のことを仮定して話を進めます。

2.4.1　Sing$(R/\mathbf{q})$ は Spec$(R/\mathbf{q})$ の閉集合、
2.4.2　$\mathbf{p}$ は Sing$(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアル。

Case 1.　$\mathrm{ht}\,\mathbf{p}$ が Sing$(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアルの中で、高さが最小の時。

新しい関係式・方程式系は考えません。

Case 2.　$\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s$ が $\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_i < \mathrm{ht}\,\mathbf{p}(= h)$ である Sing$(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアルの全体の時。

$c \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathbf{p}_i \setminus \mathbf{p}$ を取れば、$\mathrm{ht}(\mathbf{p}, c) = h + 1$。即ち、$\ell_1^{(3)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(3)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_3(\in \mathbf{N})$ が存在し、

2.4.3 $\mathbf{m}^{k_3} \subset (\mathbf{p}, c, \ell_1^{(3)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(3)})\,R$。

これより、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 8.}}$ $\quad m(k_3,\gamma) \;=\; \sum_{\sigma\in\Sigma} \underline{v}_{\gamma\sigma}\,\underline{q}_{\sigma} + \underline{w}_{\gamma}\,\underline{c} + \sum_{j=1}^{n-h-1} \underline{z}_{\gamma j}\,\ell_j^{(3)}$

ここで、$B_4 = B_3[C, V_{\gamma\sigma}, W_\gamma, Z_{\gamma j}]/J_4$ と定義します。但し、

$$J_4 = (\,m(k_3,\gamma) - \{\sum_{\sigma\in\Sigma} V_{\gamma\sigma}Q_\sigma + W_\gamma C + \sum_{j=1}^{n-h-1} Z_{\gamma j}\ell_j^{(3)}\}\,)。$$

命題 2.4.4 R_0-準同型 $\varphi_4 : B_4 \to R$ が、$\varphi_4(Q_\lambda) \in \mathbf{q}(\lambda \in \Lambda)$、$\varphi_4(S) \notin (\varphi_4(V_i))$、$\varphi_4(C) \equiv c(\mathbf{q})$ を満たせば、$(\varphi_4(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_4}$ で、$\mathbf{q} \subset \mathbf{p}_{\varphi_4}$、$\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_{\varphi_4} = h$、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}_{\varphi_4}}$ が正則でなく、$\mathbf{p}_{\varphi_4} \not\supseteq \mathbf{p}_i\ (i = 1, \ldots, s)$ であるものが存在する。

証明略。

3. 定理 A の証明。

定理を証明するには、次の主張を示せば十分です。

主張 3.1。 $(A, \mathbf{m})$ が (AP) を持つ局所整域で、$\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{Sing}\hat{A}$ なら、$\hat{\mathbf{p}} \cap A \neq (0)$。

主張の証明を始める前に、記号を準備します。 $\mathbf{m} = (x_1, \ldots, x_m)$ であれば、$\hat{A} = W[[X_1, \ldots, X_m]]/\mathbf{q}$ (但し、W は体、或は、Cohen 環) ですから、V が素体 (A が等標数の場合)、或は、$\mathbf{Z}_{(p)}$ (A が不等標数の場合) であるとしますと、次の可換図式を得ます。

$$\begin{array}{ccc} R_0 = V[X_1, \ldots, X_m]_{(p,X)} & \longrightarrow & R = W[[X_1, \ldots, X_m]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \hat{A} = R/\mathbf{q} \end{array}$$

主張の証明。 主張が正しくなかったと仮定します。つまり

3.1.1 $\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{Sing}\hat{A}$ で $\hat{\mathbf{p}} \cap A = (0)$ である $\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathbf{p}}$ が存在する

ことになります。そのような素イデアルで高さが最小のもの $\hat{\mathbf{p}}$ を取り、次の各々の場合について考えます。

Case 1. $\mathrm{ht}\hat{\mathbf{p}}$ が $\mathrm{Sing}\hat{A}$ で最小の場合。 $B = B_3$ とします。

Case 2.　$\hat{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{p}}_s$ が、$\mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}_i < \mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}$ な $\mathrm{Sing}\hat{A}$ の極小素イデアルの全体の時。

仮定より $\hat{\mathfrak{p}}_i \cap A \neq (0)$。従って $d \in \bigcap_{i=1}^{s} \hat{\mathfrak{p}}_i \cap A \setminus \{0\}$ が取れ、d の R に於ける元像 c を選べば、$c \notin \mathfrak{p}$ (但し、$\mathfrak{p}$ は $\hat{\mathfrak{p}}$ の R に於ける元像)。この場合、B として B_4 を取ります。

定理 D より次の図式を可換にする順滑 R_0-代数 D が存在します。

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

更に、次の図式を可換にする自然な A-準同型が存在します。

$$\begin{array}{ccc} E_0 = A \otimes_{R_0} D & \longrightarrow & A \otimes_{R_0} R \\ \downarrow & & \downarrow \\ E = E_0/(Q_\lambda, C-d) & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \hat{A} \end{array}$$

さて、任意の自然数 ν に対し、A の元 $s_\nu, q_{\sigma\nu} \in A (\sigma \in \Sigma \setminus \Lambda)$ を $\hat{\rho}(S) - s_\nu \in \hat{\mathfrak{m}}^\nu$、$\hat{\rho}(Q_\sigma) - q_{\sigma\nu} \in \hat{\mathfrak{m}}^\nu$ であるように選びます。この時、A が (AP) を持つことより、A-準同型 $\rho_\nu : E \to A$ で$\rho_\nu(S) - s_\nu \in \mathfrak{m}^\nu$、$\rho_\nu(Q_\sigma) - q_{\sigma\nu} \in \mathfrak{m}^\nu$、$\rho_\nu(Q_\lambda) = 0 \ (\lambda \in \Lambda)$、$\rho_\nu(C) = d$ であるものが存在します。　一方、D が順滑 R_0-代数、R が完備局所環なので、合成射 $\psi_\nu : D \to E \xrightarrow{\rho_\nu} A \to \hat{A} = R/\mathfrak{q}$ は、次の図式を可換にする R_0-準同型 $\Psi_\nu : D \to R$ に持ち上がります。

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ D & \xrightarrow{\psi_\nu} & R/\mathfrak{q} \end{array}$$

この時、$\Psi_\nu(Q_\lambda) = \mathfrak{q} \ (\lambda \in \Lambda)$、$\Psi_\nu(C) \equiv c \ (\mathfrak{q})$。更に、$\nu$ が十分大きければ、

3.1.2　$\Psi_\nu(S) \notin (\Psi_\nu(V_1), \ldots, \Psi_\nu(V_h))$。

3.1.2 の証明。　$\Psi_\nu(S) \in (\Psi_\nu(V_1), \ldots, \Psi_\nu(V_h))$ なら、$\psi_\nu(S) \in (\psi_\nu(V_1), \ldots, \psi_\nu(V_h)) \subseteq (\psi_\nu(Q_\sigma))$ であり、$\psi_\nu(S) \in \hat{\mathfrak{p}} + \hat{\mathfrak{m}}^\nu$。従って、$\hat{\rho}(S) \in \hat{\mathfrak{p}} + \hat{\mathfrak{m}}^\nu$。

命題 2.4.4 より、R の素イデアル $\mathfrak{p}_{\Psi_\nu}$ で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_{\Psi_\nu}$、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_{\Psi_\nu} = h$、$(R/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}_{\Psi_\nu}}$ が正則でなく、$\mathfrak{p}_{\Psi_\nu} \not\supseteq \mathfrak{p}_i$ (但し、$\mathfrak{p}_i$ は $\hat{\mathfrak{p}}_i$ の R に於ける元像) であるものが存在します。

よって、$\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \mathfrak{p}_{\Psi_\nu}/\mathfrak{q}$ を取れば、

$$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \in \mathrm{Sing}\hat{A}、\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \cap A \neq (0)、\mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}、\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \not\supseteq \hat{\mathfrak{p}}_i\ (i = 1, \ldots, s)。$$

以上より、ν が十分大きければ、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu}$ は $\mathrm{Sing}\hat{A}$ の極小素イデアルなので、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu+k}}$ が無限個の k に於て成立する十分大きな ν_0 が見つけられ、$\hat{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}} + \hat{\mathfrak{m}}^{\nu_0+k}$ が成立します。

従って、$\hat{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}}$。故に、$\hat{\mathfrak{p}} = \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}}$。ところで、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}} \cap A \neq (0)$ 。これは矛盾。(以上より主張の証明が終わり、従って、定理 A の証明も完了します。)